Übungsaufgabe

Maximum-Modulprinzip, Liouville-Theorem und Konsequenzen der Funktionentheorie

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Maximum-Modulprinzip

a) Formuliere das Maximum-Modulprinzip präzise: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit glattem Rand, und sei f holomorph in D sowie stetig fortgesetzt auf $\overline{D}$. Zeige, dass

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

b) Beweise das Maximum-Modulprinzip im speziellen Fall $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le R\}$ (also Diskus $\overline{D} = \{|z| \le R\}$) unter der Annahme, dass f holomorph in $\{|z| < R\}$ ist und f auf $\{|z| \le R\}$ stetig fortgesetzt wird. Gib dabei die Rolle des Randes $\{|z| = R\}$ deutlich an.

c) Folgerung (ohne Beweis): Erkläre grob, wie das Maximum-Modulprinzip genutzt wird, um Aussagen über das Verhalten von ganzfunktionen (holomorphen Funktionen auf ganz) zu treffen, z. B. im Kontext von Liouville.

Aufgabe 2: Liouville-Theorem und Polynomwachstum

a) Formuliere Liouville's Theorem: Jede ganzfache Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist konstant.

b) Beweise Liouville's Theorem (unter Zuhilfenahme des Maximum-Modulprinzips).

c) Folgerung: Zeigen Sie, dass eine ganzfunktion f mit einer Wachstumsbedingung

$$|f(z)| \leq C\,(1 + |z|)^n \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

eine Polynomfunktion vom Grad höchstens n ist.

Aufgabe 3: Konsequenzen der Funktionentheorie

a) Identitätssatz: Formuliere den Identitätssatz (Satz von der Eindeutigkeit holomorpher Funktionen). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass, falls $f = g$ auf einer Teilmenge $S \subseteq U$ mit einer Häufungspunkt in U gilt, dann $f \equiv g$ auf ganz U.

b) Korollar aus dem Identitätssatz: Zeige, dass eine ganzfunktion f identisch Null ist, falls ihre Nullstellen eine Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzen.

c) Weitere Konsequenz: Wenn eine ganzfunktion f am Unendlichen einen endlichen Grenzwert besitzt, d. h. $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ existiert, dann ist f konstant (Operator am Unendlichen). Begründe dies kurz mithilfe des Identitätssatzes und ggf. des Maximum-Modulprinzips.

Lösungen

Aufgabe 1: Maximum-Modulprinzip

a) **Lösung.** Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit glattem Rand, und sei f holomorph in D sowie stetig fortgesetzt auf $\overline{D}$. Sei weiter

$$M := \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Es gilt immer

$$M \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Denn sei $\zeta \in D$ so gewählt, dass $|f(\zeta)| = M$. Falls $|f|$ am inneren Punkt ζ ein Maximum annimmt, so ist $|f|$ dort lokal maximal; nach dem Maximum-Modulprinzip (für nicht-konstante holomorphe Funktionen) folgt daraus, dass f konstant auf ganz D ist. In diesem Fall ist $|f| \equiv M$ auf D und somit auch auf ∂D; folglich $\max_{\partial D} |f| = M$. Andernfalls liegt das Maximum von $|f|$ auf dem Rand ∂D, und damit gilt

$$M = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

Zusammengefasst: Falls f nicht konstant ist, nimmt das Maximum von $|f|$ auf $\overline{D}$ ausschließlich auf dem Rand ∂D an; falls f konstant ist, ist die Gleichung offensichtlich gegeben. Daher gilt

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

b) **Beweis im Spezialfall** $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq R\}$**.** Sei f holomorph in $\{|z| < R\}$ und stetig fortgesetzt auf $\{|z| \leq R\}$. Nach dem Maximum-Modulprinzip kann das Maximum von $|f|$ auf der abgeschlossenen Scheibe $|z| \leq R$ nur auf dem Rand $\{|z| = R\}$ auftreten oder, falls f konstant ist, überall. Folglich gilt

$$\max_{|z| \leq R} |f(z)| = \max_{|z| = R} |f(z)|.$$

In diesem Zusammenhang ist der Rand die Kreislinie $|z| = R$; dort erreicht $|f|$ das Maximum, andernfalls wäre f konstant und die Gleichung bleibt gültig. Diese Formulierung illustriert die Rolle des Randes als Ort der Maximalwerte.

c) **Folgerung (ohne Beweis):** Das Maximum-Modulprinzip erlaubt es, Aussagen über das Verhalten ganzfunktionaler Funktionen zu treffen. Insbesondere liefert es eine rigide Abschätzung der Funktion auf großen Regionen durch Werte auf den Rändern. Im Kontext von Liouville folgt daraus, dass ganzfunktionsfremde, d.h. ganzanalytische Funktionen, deren Betrag global beschränkt ist, konstant sein müssen: Falls $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz ist und $|f(z)| \leq M$ für alle z, dann ist f konstant.

Aufgabe 2: Liouville-Theorem und Polynomwachstum

a) **Lösung.** Liouville's Theorem: Jede ganzfache Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \le M$ (für alle $z \in \mathbb{C}$) ist konstant.

b) **Beweis.** Sei f ganz und $|f(z)| \le M$ für alle z. Fixiere $z_0 \in \mathbb{C}$ und wende das Maximum-Modulprinzip auf das Scheiben $D_R = \{z : |z - z_0| \le R\}$ an. Aus dem Satz folgt, dass das Maximum von $|f|$ in D_R auf dem Rand $|z - z_0| = R$ liegt. Die Cauchy-Schätzungen für die Ableitung liefern

$$|f'(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} \, |dz| \le \frac{M}{R}.$$

Da R beliebig groß gewählt werden kann, folgt $f'(z_0) = 0$ für alle z_0. Also ist $f' \equiv 0$ und f ist konstant.

c) **Folgerung:** Sei f ganz und es gilt

$$|f(z)| \le C\,(1 + |z|)^n \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ und $C > 0$. Dann ist f ein Polynom von Grad höchstens n.

. Wähle einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Für jedes $R > 0$ gilt

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{M_R\, k!}{R^k}, \quad \text{mit } M_R := \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|.$$

Aus der Wachstumsbedingung folgt

$$|f(z)| \le C(1 + |z|)^n \quad \Rightarrow \quad M_R \le C\big(1 + |z_0| + R\big)^n \le C'(1 + R)^n \quad (R \to \infty).$$

Setze dies in die Cauchy-Schätzung ein:

$$|f^{(k)}(z_0)| \le C' \frac{k!(1 + R)^n}{R^k}.$$

Für $k > n$ gilt $(1 + R)^n / R^k = O(R^{n-k}) \to 0$ beim $R \to \infty$. Also $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k > n$. Da z_0 beliebig ist, folgt, dass alle Ableitungen höheren Ordnung verschwinden; die Maclaurin-Reihe von f endet also bei Grad n. Somit ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

Aufgabe 3: Konsequenzen der Funktionentheorie

a) **Identitätssatz.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass, falls $f = g$ auf einer Teilmenge $S \subseteq U$ mit einer Häufungspunkt in U gilt, dann $f \equiv g$ auf ganz U.

ösung. Sei $h = f - g$. Dann ist h holomorph auf U und verschwindet auf S. Die Menge der Nullstellen einer nichtidentisch Null-holomorphen Funktion besitzt keine Häufungspunkte in U (Nullstellen von holomorphen Funktionen sind isoliert). Da S eine Teilmenge mit Häufungspunkt in U ist, folgt $h \equiv 0$ auf U. Also $f \equiv g$ auf ganz U.

b) **Korollar aus dem Identitätssatz.** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und identisch Null, falls ihre Nullstellen eine Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzen.

ösung. Falls f nicht identisch Null wäre, wären seine Nullstellen isoliert. Dann kann eine Menge von Nullstellen ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ existieren. Die Annahme einer Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ führt somit unmittelbar dazu, dass f identisch Null ist.

c) **Weitere Konsequenz.** Wenn eine ganzfunktion f am Unendlichen einen endlichen Grenzwert besitzt, d. h. $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ existiert, dann ist f konstant (Operator am Unendlichen). Begründung kurz mit dem Identitätssatz und ggf. dem Maximum-Modulprinzip.

ösung. Sei f ganz mit $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$. Setze $F(z) = f(z) - L$. Dann ist F ganz und $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$. Aus dem Maximum-Modulprinzip folgt, dass F auf jedem groß genug umlaufenen Kreis beschränkt und durch eine Standardabschätzung über $f'(z)$ bzw. $f^{(k)}(z)$ mit Cauchy-Schätzungen streng betrachtet verschwindet. Eine kompakte Begründung nutzt Liouville: Für jedes $R > 0$ ist $|F(z)| \leq M$ auf $|z| \leq R$ (eine geeignete globale Beschränkung stammt aus der Tatsache, dass $F(z) \to 0$ im Unendlichen), daher ist F beschränkt und ganz; nach Liouville ist F konstant, und die Grenzwertbedingung erzwingt $F \equiv 0$. Somit $f \equiv L$.