Übungsaufgabe

Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie von Stabtragwerken

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Baustatik I
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie von Stabtragwerken

Betrachten Sie ein planstabiges Tragwerk S1 mit drei Knoten A, B, C und drei Stäben AB, BC, CA. Die Knotenkoordinaten seien A = (0, 0), B = (4, 0), C = (1, 3). Die Stäbe tragen axiale Kräfte nur. Die Lagerung besteht aus A als Festlager und B als Rollenlager. Am Knoten C lastet eine vertikale Außenkraft F nach unten.

a) Bestimmen Sie die Längen der Stäbe $L_{AB},\ L_{BC},\ L_{CA}$, und die Richtungs-Einheitsvektoren der Stäbe (von A nach B, von B nach C, von C nach A). Geben Sie außerdem die Winkel der Stäbe zur x-Achse an.

b) Geben Sie die Stäbe identifizierend an und bestimmen Sie die Orientierung der Stäbe als Vektoren der Form $\mathbf{u}_{\text{Stab}}$. Formulieren Sie außerdem die Lagerreaktionen am A (Festlager) und B (Rollenlager) allgemein (Schwerpunkt auf kausale Einordnung, ohne Werte zu berechnen).

c) Formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten in Form von Unbekannten

$$N_{AB},\ N_{BC},\ N_{CA},\ A_x,\ A_y,\ B_y.$$

Verwenden Sie die Richtungsvektoren aus Teil a) und die bekannte Last F im Knoten C. Schreiben Sie die Gleichungen strikt so auf, dass keine Lösung angegeben wird.

Aufgabe 2: Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie eines quadratischen Stabnetzes

Betrachten Sie ein quadratisches Stabnetz mit den Knoten A(0,0), B(2,0), C(2,2) und D(0,2) sowie die Stäbe AB, BC, CD, DA und die Diagonale AC. Die Lagerung ist so gewählt, dass das Tragwerk statisch bestimmt ist (A Festlager, B Rollenlager).

a) Bestimmen Sie die Längen der Stäbe AB, BC, CD, DA sowie der Diagonale AC und geben Sie die Zuordnung der Stäbe zu den Knoten klar an. Bestimmen Sie die Orientierung jedes Stabes als Einheitsvektor zwischen seinen Endknoten.

b) Beschreiben Sie die Lagerung und diskutieren Sie, welche Reaktionen an den Lagern auftreten. Geben Sie an, ob das System statisch bestimmt ist und welche Voraussetzungen dafür gelten (ohne Lösung der Kräfte).

c) Skizzieren Sie grob, wie die Stabkräfte mit der Knotenpunktmethode berechnet werden würden, ohne konkrete Werte zu lösen. Strukturieren Sie die Gleichungen so, dass der Aufbau eines linearen Gleichungssystems ersichtlich wird (Knotenkräfte, Stabkräfte und Lagerreaktionen).

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie von Stabtragwerken

Gegeben: A = (0,0), B = (4,0), C = (1,3). Stäbe AB, BC, CA; axiale Kräfte nur; Lagerung A Festlager, B Rollenlager; Last F am Knoten C nach unten.

a) Stablängen, Richtungs-Einheitsvektoren und Winkel

$$\begin{aligned}
L_{AB} &= \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4,\\
L_{BC} &= \sqrt{(1-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2},\\
L_{CA} &= \sqrt{(0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Richtungs-Einheitsvektoren (von A nach B, von B nach C, von C nach A):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{AB} &= \frac{(4-0,\ 0-0)}{L_{AB}} = (1,\ 0),\\
\mathbf{u}_{BC} &= \frac{(1-4,\ 3-0)}{L_{BC}} = \frac{(-3,\ 3)}{3\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
\mathbf{u}_{CA} &= \frac{(0-1,\ 0-3)}{L_{CA}} = \frac{(-1,\ -3)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}$$

Winkel zur x-Achse:

$$\begin{aligned}
&\theta_{AB} = 0^\circ,\\
&\theta_{BC} = 135^\circ \text{ (bzw. } \frac{3\pi}{4} \text{ rad)},\\
&\theta_{CA} = \arctan 2(-3,-1) = \pi + \arctan(3) \approx 4.39064 \text{ rad} \approx 251.565^\circ.
\end{aligned}$$

b) Identifikation der Stäbe und Orientierung

- Stäbe: AB, BC, CA (die Bezeichnungen entsprechen den Knotenpaaren: AB, BC, CA).
- Orientierung der Stäbe (als $\mathbf{u}_{\text{Stab}}$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{AB} &= (1, 0)\,,\\
\mathbf{u}_{BC} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
\mathbf{u}_{CA} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}$$

Allgemeine Lagerreaktionen:

- A (Festlager): $A_x,\ A_y$ (zwei Reaktionen).
- B (Rollenlager): B_y (eine Reaktion; horizontalkomponentales Reaktionsvermögen am Rollenlager entfällt).

c) Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten (Unbekannte: N_{AB}, N_{BC}, N_{CA}, A_x, A_y, B_y)
Für die Knoten A, B und C verwenden wir die Vektoren aus Teil a) und die vertikale äußere Last F am Knoten C (nach unten symbolisch $-F\,\mathbf{e}_y$).

A:

$$N_{AB}\mathbf{u}_{AB} - N_{CA}\mathbf{u}_{CA} + (A_x, A_y) = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Ausgedrückt in Komponenten:

$$\boxed{N_{AB} + \frac{1}{\sqrt{10}}\,N_{CA} + A_x = 0}, \tag{2}$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{10}}\,N_{CA} + A_y = 0}. \tag{3}$$

B:

$$-N_{AB}\mathbf{u}_{AB} + N_{BC}\mathbf{u}_{BC} + (0, B_y) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Komponenten:

$$\boxed{-N_{AB} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,N_{BC} = 0}, \tag{5}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\,N_{BC} + B_y = 0}. \tag{6}$$

C (äußere Last F nach unten):

$$-N_{BC}\mathbf{u}_{BC} + N_{CA}\mathbf{u}_{CA} + (0, -F) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Komponenten:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\,N_{BC} - \frac{1}{\sqrt{10}}\,N_{CA} = 0}, \tag{8}$$

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}\,N_{BC} - \frac{3}{\sqrt{10}}\,N_{CA} - F = 0}. \tag{9}$$

der Gleichungen (komponentenweise):

$$\text{A: } N_{AB} + \frac{1}{\sqrt{10}}N_{CA} + A_x = 0, \tag{10}$$

$$+\frac{3}{\sqrt{10}}N_{CA} + A_y = 0, \tag{11}$$

$$\text{B: } -N_{AB} - \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BC} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}N_{BC} + B_y = 0, \tag{13}$$

$$\text{C: } \frac{1}{\sqrt{2}}N_{BC} - \frac{1}{\sqrt{10}}N_{CA} = 0, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}N_{BC} - \frac{3}{\sqrt{10}}N_{CA} - F = 0. \tag{15}$$

Lösung zu Aufgabe 2: Geometrische Eigenschaften, Lagerungen und Stabgeometrie eines quadratischen Stabnetzes

Gegeben: Quadratnetz mit Knoten A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2). Stäbe AB, BC, CD, DA und Diagonale AC. Lagerung: A Festlager, B Rollenlager.

a) Längen, Zuordnung und Richtungs-Einheitsvektoren

$$L_{AB} = 2, \quad L_{BC} = 2, \quad L_{CD} = 2, \quad L_{DA} = 2, \quad L_{AC} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Zuordnung der Stäbe zu den Knoten: AB (A–B), BC (B–C), CD (C–D), DA (D–A), AC (A–C).

Richtungs-Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{AB} &= (1, 0),\\
\mathbf{u}_{BC} &= (0, 1),\\
\mathbf{u}_{CD} &= (-1, 0),\\
\mathbf{u}_{DA} &= (0, -1),\\
\mathbf{u}_{AC} &= \frac{(2-0,\ 2-0)}{L_{AC}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

b) Lagerung, Reaktionen und Statische Bestimmtheit

- Lagerreaktionen: A (Festlager) liefert A_x, A_y; B (Rollenlager) liefert B_y.
- Anzahl der Größen: Stäbe $m = 5$ (AB, BC, CD, DA, AC); Knoten $j = 4$ (A,B,C,D); Reaktionen $r = 3$ (2 an A, 1 an B).
- Prüfsumme (Bemessung der Statisch Bestimmtheit): $m + r = 5 + 3 = 8 = 2j$. Damit ist das Tragwerk statisch bestimmt (ohne Berücksichtigung von Lastverteilungen).

c) Skizze der Knotenpunktmethode (Struktur der Gleichungen) Die Knotenpunktmethode ergibt je Knoten eine Gleichung in den Unbekannten $N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{DA}, N_{AC}$ sowie Reaktionen A_x, A_y, B_y und den externen Lasten f_A, f_B, f_C, f_D. Die Gleichungen lauten in komprimierter Vektorform pro Knoten:

$$\begin{aligned}
&\text{Knoten A: } N_{AB}\mathbf{u}_{AB} + N_{DA}\mathbf{u}_{DA} + N_{AC}\mathbf{u}_{AC} + (A_x, A_y) = \mathbf{0}, && (16)\\
&\text{Knoten B: } -N_{AB}\mathbf{u}_{AB} + N_{BC}\mathbf{u}_{BC} + (0, B_y) = \mathbf{0}, && (17)\\
&\text{Knoten C: } -N_{BC}\mathbf{u}_{BC} + N_{AC}\mathbf{u}_{AC} + \mathbf{f}_C = \mathbf{0}, && (18)\\
&\text{Knoten D: } -N_{DA}\mathbf{u}_{DA} - N_{CD}\mathbf{u}_{CD} + \mathbf{f}_D = \mathbf{0}. && (19)
\end{aligned}$$

Hierbei gilt $\mathbf{f}_C$ bzw. $\mathbf{f}_D$ als externe Knotenlasten (falls vorhanden). Bei Abwesenheit externer Lasten ($\mathbf{f}_C = \mathbf{f}_D = \mathbf{0}$) würden die Gleichungen die Kraftrichtungen der Stäbe rein aus den Reaktionen und Verknüpfungen ergeben.

Ausgeformt in Komponentien (Beispiel für mathematische Struktur):

$$\text{A: } N_{AB}(1,0) + N_{DA}(0,-1) + N_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (A_x, A_y) = (0,0), \tag{20}$$

$$\text{B: } -N_{AB}(1,0) + N_{BC}(0,1) + (0, B_y) = (0,0), \tag{21}$$

$$\text{C: } -N_{BC}(0,1) + N_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \mathbf{f}_C = (0,0), \tag{22}$$

$$\text{D: } -N_{DA}(0,-1) - N_{CD}(-1,0) + \mathbf{f}_D = (0,0). \tag{23}$$

Dies liefert ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $\{N_{AB}, N_{BC}, N_{CD}, N_{DA}, N_{AC}, A_x, A_y, B_y\}$ für gegebenenfalls bekannte Knotenlasten $\mathbf{f}_C, \mathbf{f}_D$.