Übungsaufgabe

Schnittprinzip: Berechnung von Teilgrößen durch Schnitte

Universität:	Technische Universität Berlin
Kurs/Modul:	Baustatik I
Erstellungsdatum:	September 6, 2025

Aufgabe 1: Schnittprinzip – Berechnung von Teilgrößen durch Schnitte

Betrachten Sie einen einfach gestützten Balken der Länge L m mit einem Festlager bei A und einem Loslager bei B. Eine vertikale Punktlast P wirkt am Ort $x = a$ (mit $0 < a < L$).

a) Zeichnen Sie das System und beschriften Sie die Lagerreaktionen A_y und B_y sowie die Last P am Punkt $x = a$.

b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen A_y und B_y in Abhängigkeit von L, a und P.

$$B_y = \frac{P\,a}{L} \tag{1}$$

$$A_y = P - B_y \;=\; P\,\frac{L - a}{L} \tag{2}$$

c) Führen Sie für einen Schnittebenenpunkt x mit $0 < x < L$ den linken Teil des Trägers betrachtet und formulieren Sie das Gleichgewicht jeweils separat für die Achsen:

für $0 < x < a$:

$$V(x) = A_y \tag{3}$$

$$M(x) = A_y\,x \tag{4}$$

für $a < x < L$:

$$V(x) = A_y - P \tag{5}$$

$$M(x) = A_y\,x - P\,(x - a) \tag{6}$$

d) Geben Sie eine numerische Aufgabe mit den Parametern $L = 6\,\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{m}$, $P = 12\,\mathrm{kN}$. Bestimmen Sie - die Lagerreaktionen A_y und B_y, - die Querkraft $V(x)$ und das Moment $M(x)$ an den Stellen $x = 1\,\mathrm{m}$ und $x = 3\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 2: Schnittprinzip in einem planaren Stabtragwerk (Dreiecksrahmen)

Betrachten Sie einen kleinen planaren Stabrahmen ABC mit den Stäben AB, BC und AC. Der Rahmen liegt so, dass A ein Festlager (Pin) ist und C ein Loslager (.vertikale Reaktion). Eine vertikale Last P wirkt am Knoten B nach unten.

a) Zeichnen Sie den Dreiecksrahmen ABC mit den Stäben AB, BC, AC und den Lagerreaktionen an A (beide Komponenten) sowie an C (vertikale Komponente). Beschreiben Sie, welche Größen Sie im Folgenden bestimmen wollen.

b) Wenden Sie eine Schnittebene so an, dass der Schnitt durch die Stäbe AB und BC verläuft und den linken Teil des Trägers isoliert. Bezeichnen Sie die Schnittkräfte an der Schnittebene mit F_{AB} (entlang AB) und F_{BC} (entlang BC), jeweils in der Richtung, die dem linken Teil zugeordnet ist.

c) Schreiben Sie die Gleichgewichtsbedingungen des linken Teils:

$$\sum F_x = 0,$$
$$\sum F_y = 0,$$
$$\sum M_A = 0,$$

und verwenden Sie die Schnittgrößen F_{AB} und F_{BC} als Unbekannte. Formulieren Sie die Gleichungen so, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, wenn zusätzlich die Lagerreaktionen aus Teil a) bekannt sind.

d) Skizzieren Sie, wie Sie die bei dem Schnitt entstehenden Kräfte in den Stäben AB und BC interpretieren (Zug oder Druck) und wie Sie gegebenenfalls weitere Schnitte durchführen würden, um die verbleibenden Stabkräfte AC zu bestimmen.

Lösungen

Aufgabe 1: Lösung – Schnittprinzip – Berechnung von Teilgrößen durch Schnitte

a) Lagerreaktionen Für den einfach gestützten Träger mit Festlager A und Loslager B sowie vertikaler Punktlast P an der Stelle $x = a$ liefert die Vertikalkomponente des Gleichgewichts die Reaktionsgrößen

$$B_y = \frac{P\,a}{L}, \qquad A_y = P - B_y = P\left(1 - \frac{a}{L}\right) = P\,\frac{L-a}{L}.$$

b) Schnittgrößen im linken Teil Für den linken Teil gilt:

$$V(x) = \begin{cases} A_y, & 0 < x < a, \\ A_y - P, & a < x < L, \end{cases} \qquad M(x) = \begin{cases} A_y\,x, & 0 < x < a, \\ A_y\,x - P\,(x-a), & a < x < L. \end{cases}$$

c) Allgemeines Ergebnis am Schnittpunkt x (Messung der rechts/nach links gerichteten Kräfte beachten) Die obigen Formeln entsprechen dem üblichen Vorzeichenkonzept: Querkraft $V(x)$ positiv bedeutet eine Zugrichtung der Querkraft nach oben (im linken Teil), und das Biegemoment $M(x)$ wird als positives Gegenclockwise interpretiert. Das Gleichgewicht des linken Teils liefert damit die geforderten Größen.

d) Numerische Aufgabe (Parameter: $L = 6\,\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{m}$, $P = 12\,\mathrm{kN}$) Berechnungen:

$$B_y = \frac{P\,a}{L} = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4\,\mathrm{kN}, \quad A_y = P - B_y = 12 - 4 = 8\,\mathrm{kN}.$$

Lagerreaktionen: - $A_y = 8\,\mathrm{kN}$, - $B_y = 4\,\mathrm{kN}$.

Querkraft und Moment an den gefragten Stellen: - $x = 1\,\mathrm{m} < a$: $V(1) = A_y = 8\,\mathrm{kN}$, $M(1) = A_y\,x = 8 \times 1 = 8\,\mathrm{kN\,m}$. - $x = 3\,\mathrm{m} > a$: $V(3) = A_y - P = 8 - 12 = -4\,\mathrm{kN}$, $M(3) = A_y\,x - P\,(x-a) = 8 \cdot 3 - 12(3-2) = 24 - 12 = 12\,\mathrm{kN\,m}$.

Zusammenfassung der Ergebnisse (Aufgabe 1): - $A_y = 8\,\mathrm{kN}$, $B_y = 4\,\mathrm{kN}$. - $V(1) = +8\,\mathrm{kN}$, $M(1) = +8\,\mathrm{kN\,m}$. - $V(3) = -4\,\mathrm{kN}$, $M(3) = +12\,\mathrm{kN\,m}$ (Vorzeichen wie oben festgelegt).

Die Aufgabenstellung fordertete auch eine grafische Skizze der Kräfte; die Reaktionsgrößen und die Verläufe von $V(x)$ und $M(x)$ ergeben sich direkt aus dem Gleichgewicht.

Aufgabe 2: Lösung – Schnittprinzip in einem planaren Stabtragwerk (Dreiecksrahmen)

Sei der Dreiecksrahmen ABC gegeben mit Stäben AB, BC und AC. A ist ein Festlager (Pin) und C ein Loslager (vertikale Reaktion). Eine vertikale Last P wirkt am Knoten B nach unten.

a) Reaktionsgrößen am Rand Man wählt Koordinaten so, dass A im Ursprung liegt ($A = (0,0)$). Sei $B = (x_B, y_B)$ und $C = (x_C, y_C)$. Dann gelten aus dem Gesamtsystem (globalem Gleichgewicht) die folgenden Reaktionsgrößen: - Horizontalreaktion am A: $A_x = 0$ (keine horizontale äußere Last) - Vertikalreaktionen: A_y und C_y mit

$$A_y + C_y = P$$

- Momentengleichgewicht um A:

$$\mathbf{M}_A: \quad x_C\, C_y - x_B\, P = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = \frac{x_B}{x_C}\, P.$$

Damit folgt

$$A_y = P - C_y = P\left(1 - \frac{x_B}{x_C}\right) = P\,\frac{x_C - x_B}{x_C}.$$

b) Schnittebene und Schnittgrößen Wähle eine Schnittebene, die durch die Stäbe AB und BC geht und den linken Trägerteil isoliert. Die Schnittkräfte an der Schnittebene werden benannt als - F_{AB}: Kraft im Stab AB entlang AB (Richtung so gewählt, dass sie dem linken Teil zugeordnet ist), - F_{BC}: Kraft im Stab BC entlang BC (Richtung so gewählt, dass sie dem linken Teil zugeordnet ist).

c) Schnittersche Gleichgewichte des linken Teils Unter Verwendung der bekannten Randreaktionen ($A_x = 0$, A_y, C_y) und der Schnittgrößen F_{AB} und F_{BC} gilt das Gleichgewicht des linken Teils:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0: &\quad A_x + F_{AB}\cos\alpha + F_{BC}\cos\beta = 0,\\
\sum F_y = 0: &\quad A_y + F_{AB}\sin\alpha + F_{BC}\sin\beta - P = 0,\\
\sum M_A = 0: &\quad -P\,x_B + F_{BC}\,d = 0,
\end{aligned}$$

wobei - α der Winkel von AB zur positiven x-Achse ist (also $\cos\alpha, \sin\alpha$ die Einheitsvektoren von AB darstellen), - β der Winkel von BC zur positiven x-Achse ist (entsprechend für BC), - d der Abstand der Geraden BC von A ist (es ist der senkrechte Abstand von A zur Geraden BC). Eine sinnvolle Darstellung ist:

$$d = \frac{|\ \det(B, C)\ |}{|BC|} = \frac{|x_B y_C - y_B x_C|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}} \quad \text{(mit Vorzeichen gemäß Orientierung)},$$

so dass die Momentengleichung sinnvolle Vorzeichen ergibt. Für die Lösung ist typischerweise der orientierte Wert von d zu verwenden, sodass

$$-Px_B + F_{BC}d = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = \frac{Px_B}{d}.$$

Hinweis: Die Gleichungen nutzen die bekannte Randreaktion $A_x = 0$ aus dem a).

d) Interpretation der Schnitkräfte und weitere Schnitte - Interpretation der Schnittkräfte: - F_{AB} und F_{BC} sind die Kräfte, die jeweils entlang der entsprechenden Stäbe wirken. Ein positives Vorzeichen (gemäß der Definition oben) bedeutet Zugsarm in dem jeweiligen Stab; ein negatives Vorzeichen bedeutet Druck (Kompression). - Weitere Schnitte zur Bestimmung von AC: - Sinnvoll ist ein weiterer Schnitt durch die Stäbe AB und AC oder durch BC und AC, um das restante Stabs Mitglied AC zu bestimmen. Alternativ kann man das joint-B-Verfahren verwenden: - Nach Kenntnis von $A_x = 0$, A_y und C_y sowie der Schnittkräfte F_{AB} und F_{BC} löst man am Knoten B das Gleichgewicht

$$F_{AB}\,\hat{e}_{AB} + F_{BC}\,\hat{e}_{BC} + (0, -P) = \mathbf{0},$$

um F_{AB} zu bestimmen (und ggf. F_{BC} zu validieren). - Anschließend verwendet man Knoten A oder Knoten C (unter Berücksichtigung der bekannten Randreaktionen) um den Rest der Stabkräfte, insbesondere F_{AC}, zu ermitteln, z. B. bei Knoten A:

$$A_y + F_{AB}\,\sin\alpha + F_{AC}\,\sin\gamma = 0, \quad F_{AB}\cos\alpha + F_{AC}\cos\gamma = 0 \quad \text{(mit } \alpha, \gamma \text{ Winkel der Stäbe).}$$

- Alternativ führt ein zweiter gezielter Schnitt durch BC und AC direkt zu einer isolierten Berechnung von F_{AC} über die Gleichgewichte des entsprechenden Teils.

Hinweis zur Praxis - Die konkrete numerische Bestimmung aller Schnittgrößen hängt von den Geometrieparametern ab (x_B, y_B, x_C, y_C). Die obigen Formeln geben eine allgemeine Vorgehensweise; für eine konkrete Aufgabe empfiehlt sich die Angabe der Koordinaten bzw. der Lagen der Knoten, um numerische Werte zu berechnen.