Übungsaufgabe

Prinzip der virtuellen Weggrößen: Formulierungen, Aufgaben und Anwendungen

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Formulierungen des Prinzips der virtuellen Weggrößen (PVW)

In dieser Aufgabe wird das Prinzip der virtuellen Weggrößen als Grundlage der statischen Modellierung vorgestellt. Bearbeiten Sie die Unteraufgaben strukturiert und ohne Lösungen zu notieren.

a) Formuliere die allgemeine PVW-Gleichung für ein statisch bestimmtes Stabtragwerk im Gleichgewicht. Schreibe die Beziehung als Gleichung der virtuellen Arbeiten der äußeren Kräfte und der inneren Kräfte getrennt auf und fasse sie anschlie-zu einer kompakten Gleichung zusammen.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \delta W_{\text{int}} \\ \delta W_{\text{ext}} &= \sum_i F_i \, \delta u_i \\ \delta W_{\text{int}} &= \sum_j N_j \, \delta l_j \end{aligned}$$

b) Formuliere die virtuellen Weggrößen, die sich aus einer zulässigen virtuellen Verschiebung ergeben. Bestimme, wie sich eine virtuelle Verschiebung an einem Gelenk bzw. einer Lagerstelle auf die Änderung der Stablängen auswirkt. Verwende dafür die Beziehungen zwischen δl_j, $\delta \epsilon_j$ und der ursprünglichen Länge L_j.

$$\delta l_j = \delta \epsilon_j \, L_j, \qquad \delta \epsilon_j = \frac{\delta l_j}{L_j}$$

c) Erläutere kurz die drei Arbeitsprinzipien der Mechanik im Zusammenhang mit dem PVW: - Aufbauprinzip - Schnittprinzip - Arbeitsprinzipien der Mechanik (insbesondere Gleichgewicht und Energiebetrachtung)

d) Skizziere eine einfache, symmetrische Stabaufgabe (ohne Werte zu berechnen): Ein stabiles Dreiecks-Tragwerk mit zwei Stäben, welche eine obere Knotenverbindung C mit zwei unteren Lagern A und B bilden. Skizziere die externe Vertikalkraft F am Knoten C und die zulässigen virtuellen Verschiebungen, die eine vertikale Verschiebung an C erzeugen. Gib die Formulierungen der Arbeitsgleichungen entsprechend dem PVW an.

Aufgabe 2: Anwendung des PVW – Deflexionsbestimmung in einem einfachen Stabtragwerk

Ziel dieser Aufgabe ist es, das PVW-Verfahren zur Bestimmung der Verschiebung eines Knotens in vertikaler Richtung zu verwenden. Gegeben sei ein einfaches Dreiecks-Tragwerk mit den Eckpunkten A = (0,0), B = (L,0) und C = (L/2, H). Die Stäbe AC und BC verbinden C mit A bzw. B. Beide Stäbe haben denselben Elastizitätsmodul E und dieselbe Querschnittsfläche A. Eine äußere Vertikallast F wirkt am Knoten C nach unten. Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung δ_C des Knotens C anhand des PVW mit einer virtuellen Einheitslast in vertikaler Richtung am C.

Gegebenheiten und Notation: - Länge der Stäbe: $l_1 = l_2 = \sqrt{(L/2)^2 + H^2}$ - Stabkräfte N_1, N_2 in AC bzw. BC aufgrund der äußeren Last F - Stabkräfte N_1', N_2' in AC bzw. BC aufgrund der virtuellen Einheitlast am C - Querschnittsfläche A_1, A_2 (ggf. verschieden), E-Modul E_1, E_2 (ggf. verschieden)

a) Bestimme die Stabkräfte N_1, N_2 im Träger aufgrund der äußeren Vertikallast F am Knoten C (ansatzweise). Formuliere die Gleichgewichtsbeziehungen am Knoten C und nutze die Geometrie der Stäbe. Schreibe die relevanten Gleichungen systematisch auf, ohne Lösungen zu berechnen.

b) Bestimme die Stabkräfte N_1', N_2' im Träger, die durch eine virtuelle Einheitslast in vertikaler Richtung am Knoten C erzeugt wird. Drücke N_1', N_2' explizit in Abhängigkeit von der Geometrie (L, H) und den Stabskennwerten aus (E_1, A_1, E_2, A_2).

c) Formuliere die Deflexionsformel des PVW für δ_C im Träger in Form einer Summe über die Stäbe:

$$\delta_C \;=\; \sum_{j=1}^{2} \frac{N_j\, N_j'\, L_j}{A_j\, E_j}$$

Schreibe die jeweilige Beiträge für die beiden Stäbe akribisch aus und erkläre kurz, wie die Vorzeichenordnung sich aus der gewählten Richtung der Verschiebung ergibt.

d) Fassen Sie die Schritte zusammen: Welche Größen müssen Sie berechnen, bevor Sie die Deflexion δ_C vollständig bestimmen können? Welche Annahmen (z. B. Linearität, Kleinwinkel, statische Bestimmtheit) liegen dem Vorgehen zugrunde?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) Allgemeine PVW-Gleichung und kompaktes PVW-Form

Nach dem Prinzip der virtuellen Weggrößen gilt im statisch bestimmten Stabtragwerk im Gleichgewicht

$$\delta W_{\text{ext}} \;=\; \delta W_{\text{int}}.$$

Aus den Definitionen der virtuellen Arbeiten folgt

$$\delta W_{\text{ext}} \;=\; \sum_i F_i\,\delta u_i, \qquad \delta W_{\text{int}} \;=\; \sum_j N_j\,\delta l_j.$$

Daraus ergibt sich die PVW-Gleichung

$$\boxed{\sum_i F_i\,\delta u_i \;=\; \sum_j N_j\,\delta l_j}.$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\delta l_j \;=\; \delta\varepsilon_j\,L_j, \qquad \delta\varepsilon_j \;=\; \frac{\delta l_j}{L_j}$$

kann man auch schreiben

$$\delta W_{\text{ext}} \;=\; \sum_j N_j\,\delta l_j \;=\; \sum_j N_j\,(\delta\varepsilon_j\,L_j).$$

b) Virtuelle Weggrößen und Änderung der Stablängen

Für eine zulässige virtuelle Verschiebung lässt sich die Änderung der Stablänge durch die Memberrichtung ausdrücken:

$$\delta l_j \;=\; \hat{\mathbf{e}}_j \cdot (\delta\mathbf{u}_q - \delta\mathbf{u}_p),$$

wobei $\hat{\mathbf{e}}_j$ der Einheitsvektor des Stammes j ist, der von Knoten p nach Knoten q zeigt.

Im Spezialfall einer vertikalen virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{u}_C = (0, \delta)$ am Knoten C und festen anderen Knoten gilt für die beiden Stäbe des Dreiecks (AC und BC) mit Länge l_j und Höhendifferenz H:

$$\delta l_1 \;=\; \delta l_2 \;=\; \frac{H}{l_1}\,\delta.$$

Zusätzlich gilt allgemein

$$\delta l_j \;=\; \delta\varepsilon_j\,L_j, \qquad \delta\varepsilon_j \;=\; \frac{\delta l_j}{L_j}.$$

c) Drei Arbeitsprinzipien der Mechanik im Zusammenhang mit dem PVW

- Aufbauprinzip: Die Geometrie des Tragwerks bestimmt die Deformationsfelder und damit die Beziehung zwischen äußeren Kräften und internen Kräften über die Stablängen.

- Schnittprinzip: Man teilt das Tragwerk durch virtuelle Schnitte und betrachtet die Arbeiten an den Teilen; analog zur PVW ergibt sich so die Work-Energy-Betrachtung.

- Arbeitsprinzipien der Mechanik (insbesondere Gleichgewicht und Energiebetrachtung): Bei einer zulässigen virtuellen Verschiebung verschiebt sich das System so, dass die Summe der Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Summe der Arbeit der inneren Kräfte ist; die Balance zwischen externen und internen Arbeiten ermöglicht die Bestimmung von Verschiebungen über PVW.

d) Skizze einer einfachen, symmetrischen Stabaufgabe (ohne Werte)

Eine schematische symmetrische Dreiecks-Tragkonstruktion mit zwei Stäben AC und BC, obere Knotenverbindung C, darunter liegende Lager A und B; äußere Vertikallast F am Knoten C; zulässige virtuelle Verschiebungen erzeugen eine vertikale Verschiebung von C. Die Stäbe haben die Länge $l_1 = l_2 = \sqrt{(L/2)^2 + H^2}$. Die PVW-Gleichungen für die beiden Stäbe lauten:

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i F_i\,\delta u_i = -F\,\delta \quad \text{(vertikale Verschiebung am } C\text{)},$$

$$\delta W_{\text{int}} = N_1\,\delta l_1 + N_2\,\delta l_2.$$

Für eine virtuelle Verschiebung $\delta u_C = (0, \delta)$ erhält man $\delta l_1 = \delta l_2 = \frac{H}{l_1}\delta$; damit erhält man die Arbeitsgleichungen der PVW in kompakter Form.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Stabkräfte N_1 und N_2 aufgrund der äußeren Vertikallast F am Knoten C

Im Knoten C gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$N_1\,\hat{\mathbf{e}}_{AC}^{C} \;+\; N_2\,\hat{\mathbf{e}}_{BC}^{C} \;+\; (0, -F) \;=\; \mathbf{0},$$

mit den Einheitsvektoren (Stäbe von C zu A bzw. C zu B)

$$\hat{\mathbf{e}}_{AC}^{C} \;=\; \left(-\frac{L}{2l_1}, -\frac{H}{l_1}\right), \qquad \hat{\mathbf{e}}_{BC}^{C} \;=\; \left(\frac{L}{2l_1}, -\frac{H}{l_1}\right),$$

und $l_1 = l_2 = \sqrt{(L/2)^2 + H^2}$.

Auftrennung nach x- und y-Komponenten liefert

$$\text{(x-komp.)} \quad -\frac{L}{2l_1}N_1 \;+\; \frac{L}{2l_1}N_2 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; N_1 = N_2,$$

$$\text{(y-komp.)} \quad -\frac{H}{l_1}N_1 \;-\frac{H}{l_1}N_2 \;-\; F \;=\; 0 \;\Rightarrow\; N_1 + N_2 \;=\; -\frac{l_1}{H}F.$$

Mit $N_1 = N_2$ folgt

$$\boxed{N_1 = N_2 = -\,\frac{l_1}{2H}\,F}.$$

b) Stabkräfte N_1' und N_2' durch virtuelle Einheitslast in vertikaler Richtung am Knoten C

Analog zur Aufgabe (a), aber mit der äußeren Last F durch die virtuelle Einheitslast 1 ersetzt, erhalten wir

$$N_1' = N_2' = -\,\frac{l_1}{2H}.$$

Diese Größen hängen nur von der Geometrie $(l_1,\ H)$ ab und nicht von den Stabeigenschaften (E_j, A_j).

c) Deflexionsformel des PVW für δ_C in Form einer Summe über die Stäbe

Die Deflexion am Knoten C ergibt sich nach PVW als

$$\delta_C \;=\; \sum_{j=1}^{2} \frac{N_j\, N_j'\, L_j}{A_j\, E_j}.$$

Für die hiersymmetrische Anordnung ($L_1 = L_2 = l_1$) gilt

$$\delta_C \;=\; \frac{N_1 N_1' l_1}{A_1 E_1} \;+\; \frac{N_2 N_2' l_1}{A_2 E_2}.$$

Einsetzen der oben gefundenen Werte (mit Vorzeichen konventionell als Zugkräfte positiv) ergibt, dass beide Beiträge gleich sind:

$$N_1 N_1' = N_2 N_2' = \left(-\frac{l_1}{2H} F\right)\left(-\frac{l_1}{2H}\right) = \frac{l_1^2}{4H^2} F.$$

Damit

$$\boxed{\delta_C = \frac{l_1^3 F}{4H^2}\left(\frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2}\right)}.$$

Hinweis zu Vorzeichen: - Beide N-VEktor-Komponenten ergeben durch die gewählte Richtungsdefinition (positive Strebenzugkraft) negative Stabkräfte bei einer Abwärtslast, d.h. $N_1, N_2 < 0$ und ebenso $N_1', N_2' < 0$ bei der virtuellen Abwärtslast. In der Produktbildung $N_j N_j'$ treten Vorzeichen auf, die sich gegenseitig negieren; die resultierende Deflexion δ_C wird entsprechend der gewählten positive Abtastrichtung (hier vertikal nach unten) positiv.

d) Welche Größen müssen vor der Bestimmung von δ_C berechnet werden? Welche Annahmen liegen dem Vorgehen zugrunde?

- Benötigte Größen vor der PVW-Berechnung: - Geometrie des Tragwerks: L, H sowie daraus $l_1 = l_2 = \sqrt{(L/2)^2 + H^2}$. - Material- und Querschnittsdaten: E_1, A_1 bzw. E_2, A_2. - Die äußere Last F (und im PVW-Versuch die virtuelle Einheitlast) an Knoten C. - Die Stabkräfte N_1, N_2 (Teil a) und die virtuellen Stabkräfte N_1', N_2' (Teil b)). - Vorgehensannahmen: - Lineare Elastizität (Hookesches Gesetz) gilt: $N_j = E_j A_j\, \epsilon_j$ mit $\epsilon_j = \delta l_j / l_j$ und kleinen Deformationen (Kleinwinkelannahme). - Statisch bestimmtes Tragwerk (2 Stäbe, 2 Reaktionsgrößen am Knoten C ausreichend für Gleichgewicht). - PVW ist zulässig, d.h. Superpositionsprinzip gilt; Kräfte, Verschiebungen und Längenänderungen bleiben klein. - Vorzeichen- und Richtungskonventionen sind konsistent gewählt: vertikale Verschiebung am C nach unten als positive Deflexion, positive N$_j als Zugkraft$.