Übungsaufgabe

Poisson- und Dirichlet-Formeln, Randwertprobleme im Einheitskreis

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Analysis III für Ingenieure
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Poisson- und Dirichlet-Formeln, Randwertprobleme im Einheitskreis

Betrachte das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{im } D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \qquad u|_{\partial D} = g(\varphi) \quad \text{auf dem Rand,}$$

wobei der Rand durch $\partial D = \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\}$ parametriert wird. Die Poisson-Integral-Formel lautet

$$P_r(\psi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\psi + r^2}, \qquad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi)\, g(\phi)\, d\phi.$$

a) Randwertfunktion $g(\varphi) \equiv 1$. Bestimme die harmonische Funktion u im Disk im Innern von D.

b) Randwert $g(\varphi) = \cos(n\varphi)$ mit festem $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die harmonische Fortsetzung u im Disk.

c) Randwert $g(\varphi) = \sin(n\varphi)$ mit festem $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die harmonische Fortsetzung u im Disk.

d) Gemischter Randwert $g(\varphi) = \cos(m\varphi) + 2\cos(2\varphi) + \sin(\varphi)$ mit $m \in \mathbb{N}$. Bestimme die harmonische Fortsetzung u im Disk.

e) Allgemeiner Randwert mit endlicher Fourier-Reihe $g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\big)$. Bestimme die harmonische Funktion u im Disk und beschreibe die Abhängigkeit von r und θ.

Hinweis: Die Lösung erfolgt durch die Struktur der Poisson-Operator-Fortsetzung: Jede Fourier-Komponente wird separat fortgesetzt und ergibt eine Term-Darstellung von $u(r, \theta)$ als Summe von r^k-Termen.

Aufgabe 2: Fourier-Darstellungen und innere Fortsetzung

Im Zusammenhang mit Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$ im Disk gelten die folgenden Überlegungen zur Fourier-Reihe auf dem Rand. Sei $g(\varphi)$ $2\pi\breve{}periodischunddiezugehrigeharmonischeFortsetzungu$ im Disk durch das Poisson-Integral definiert.

a) Gegeben sei $g(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi$. Formuliere $u(r,\theta)$ im Disk durch das Poisson-Integral und beschreibe die Form von u in Abhängigkeit von r und θ.

b) Gegeben sei $g(\varphi) = 3 + 4\cos(2\varphi)$. Formuliere $u(r,\theta)$ im Disk durch das Poisson-Integral. Gib die Struktur von u an und stelle die Abhängigkeit von r und θ klar dar.

c) Gegeben sei $g(\varphi) = \gamma_1 \cos\varphi + \delta_3 \cos(3\varphi) + \epsilon_1 \sin\varphi$. Formuliere $u(r,\theta)$ im Disk, und erläutere die Rolle der einzelnen Fourier-Komponenten in der radialen Entwicklung.

d) Allgemeine Bemerkung: Fasse zusammen, wie sich aus einer endlichen Fourier-Reihe der Randbedingung die innere Lösung als Summe unendlich vieler Harmonik-Knoten entwickeln kann, bzw. wie sich die Struktur durch die Potenzreihe in r^k ausdrückt.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Poisson- und Dirichlet-Formeln, Randwertprobleme im Einheitskreis

a) Da der Randwert $g(\varphi) \equiv 1$ konstant ist, enthält die Fourier-Reihe nur den Nullte-Term $a_0/2 = 1$ (also $a_0 = 2$) und alle anderen Koeffizienten vanish. Die Poisson-Integral-Fortsetzung ergibt daher die konstante harmonische Funktion

$$u(z) \equiv 1 \quad \text{im } D = \{|z| < 1\}.$$

b) $g(\varphi) = \cos(n\varphi)$ mit festem $n \in \mathbb{N}$. Die Fourier-Koeffizienten ergeben $a_n = 1$ und alle übrigen $a_k, b_k = 0$ $(k \neq n)$. Die harmonische Fortsetzung ist somit

$$u(re^{i\theta}) = r^n \cos(n\theta).$$

c) $g(\varphi) = \sin(n\varphi)$ mit festem $n \in \mathbb{N}$. Analog zu Fall (b) erhalten wir $b_n = 1$ und alle anderen Koeffizienten null, damit

$$u(re^{i\theta}) = r^n \sin(n\theta).$$

d) Gemischter Randwert $g(\varphi) = \cos(m\varphi) + 2\cos(2\varphi) + \sin(\varphi)$ mit $m \in \mathbb{N}$. Die Lösung ergibt sich durch Superposition der einzelnen Fourier-Komponenten:

$$u(re^{i\theta}) = r^m \cos(m\theta) + 2\, r^2 \cos(2\theta) + r \sin(\theta).$$

e) Allgemeiner Randwert mit endlicher Fourier-Reihe

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\big).$$

Die harmonische Fortsetzung im Disk lautet

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} r^k \big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\big),$$

d.h. jede Fourier-Komponente wird separat fortgesetzt und trägt einen Faktor r^k bei der Fortsetzung in das Innere des Kreises. Die Abhängigkeit von r und θ ist somit charakterisiert durch die Polynome in r multipliziert mit den entsprechenden trigonometrischen Funktionen in θ.

Hinweis: Die Lösung erfolgt durch die Struktur der Poisson-Operator-Fortsetzung: Jede Fourier-Komponente wird separat fortgesetzt und ergibt eine Term-Darstellung von $u(r,\theta)$ als Summe von r^k-Termen.

Lösung zu Aufgabe 2: Fourier-Darstellungen und innere Fortsetzung

Im Zusammenhang mit Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$ im Disk gelten die folgenden Überlegungen zur Fourier-Reihe auf dem Rand. Sei $g(\varphi)$ $2\pi\breve{}periodischunddiezugehrigeharmonischeFortsetzungu$ im Disk durch das Poisson-Integral definiert.

a) Gegeben sei $g(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi$. Formuliere $u(r,\theta)$ im Disk durch das Poisson-Integral und beschreibe die Form von u in Abhängigkeit von r und θ.

Lösung: In der Form $g(\varphi) = a_0/2 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$ hat man $a_0 = 2\alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$, $b_1 = \beta_1$. Die innere Lösung ist daher

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + r\big(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta\big) = \alpha_0 + \alpha_1\, r\cos\theta + \beta_1\, r\sin\theta.$$

b) Gegeben sei $g(\varphi) = 3 + 4\cos(2\varphi)$.

Lösung: Hier liegt $a_0/2 = 3$ und $a_2 = 4$ (alle anderen Koeffizienten null). Die innere Lösung ist

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + r^2 a_2 \cos(2\theta) = 3 + 4r^2\cos(2\theta).$$

c) Gegeben sei $g(\varphi) = \gamma_1 \cos\varphi + \delta_3 \cos(3\varphi) + \epsilon_1 \sin\varphi$.

Lösung: Es gelten $a_1 = \gamma_1$, $a_3 = \delta_3$, $b_1 = \epsilon_1$ und alle übrigen Koeffizienten null. Somit

$$u(r,\theta) = r\big(\gamma_1 \cos\theta + \epsilon_1 \sin\theta\big) + r^3\big(\delta_3 \cos(3\theta)\big).$$

d) Allgemeine Bemerkung: Fasse zusammen, wie sich aus einer endlichen Fourier-Reihe der Randbedingung die innere Lösung als Summe unendlich vieler Harmonik-Knoten entwickeln kann, bzw. wie sich die Struktur durch die Potenzreihe in r^k ausdrückt.