Übungsaufgabe

Ermittlung von Zustands- und Einflusslinien sowie Interpretation der Ergebnisse

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Baustatik I
Erstellungsdatum: September 6, 2025

Aufgabe 1: Ermittlung von Zustands- und Einflusslinien sowie Interpretation der Ergebnisse

Gegeben sei ein einfach unterstützter Balken der Länge L mit Auflagern A links und B rechts. Eine vertikale Punktlast P bewegt sich von A nach B entlang des Balkens. Untersuchen Sie Einflusslinien (Veränderungen der Reaktionen und des Biegemoments durch die Verschiebung der Last) sowie Zustandslinien (Durchbiegung) des Systems. Berücksichtigen Sie das Prinzip der virtuellen Weggrößen bzw. des virtuellen Kraftprinzips.

a) Bestimmen Sie die Einflusslinie der vertikalen Reaktion am linken Auflager R_A in Abhängigkeit von der Lastposition $a \in [0, L]$ bei einer Einheitlast. Geben Sie die funktionale Form in Abhängigkeit von a an und beschreiben Sie qualitativ die Form der Einflusslinie.

b) Bestimmen Sie die Einflusslinie der vertikalen Reaktion am rechten Auflager R_B in Abhängigkeit von a (Einheitlast). Beschreiben Sie die Form der Einflusslinie.

c) Bestimmen Sie die Einflusslinie des Biegemoments $M(x)$ an einer Stelle x (mit $0 \leq x \leq L$) verursacht durch eine Lastposition a. Beschreiben Sie die Form der Einflusslinie als Funktion $M(x; a)$ und erläutern Sie, wie sich die Lage a auf die Form auswirkt. Skizzieren Sie eine qualitative Darstellung der Einflusslinie $M(x; a)$ in Abhängigkeit von a und x.

d) Interpretieren Sie die Ergebnisse der Einflusslinien: In welchen Bereichen des Balkens werden Reaktionen bzw. Momente am stärksten beeinflusst? Welche Rückschlüsse ergeben sich für die Lage von Lasten zur Vermeidung hoher Spitzenreaktionen? Diskutieren Sie außerdem, wie sich eine Lastführung zur Reduzierung von Spitzenreaktionen nutzen lässt.

Aufgabe 2: Zustandslinien (Durchbiegung) und Interpretation

Fortführung des gleichen Balkens. Untersuchen Sie die Zustandslinie der Durchbiegung infolge einer vertikalen Last, die sich entlang des Balkens bewegt, unter der Annahme linear elastischer Verformungen.

a) Formulieren Sie die Zustandslinie der Durchbiegung $w(x; a)$ am Ort x des Balkens, wenn eine Einheitlast $P = 1$ an der Position a wirkt. Geben Sie die allgemeine Abhängigkeit $w(x; a)$ an (ohne vollständige numerische Auswertung) und beschreiben Sie, wie sich w mit a verändert.

b) Nehmen Sie das Beispiel $a = L/2$ und skizzieren Sie qualitativ die Funktion $w(x; L/2)$ für alle $x \in [0, L]$.

c) Diskutieren Sie, wie sich die Zustandslinie der Durchbiegung ändert, wenn a von links nach rechts verschoben wird. Welche Aussagen ergeben sich zur Sensitivität der Durchbiegung in Abhängigkeit von der virtuellen Weggröße?

d) Welche praktischen Schlüsse lassen sich aus den Zustandslinien für die Tragwerksplanung ableiten (z. B. Positionierung von Lasten, Verformungskriterien, Sicherheit)?

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

a) Einflusslinie der vertikalen Reaktion am linken Auflager R_A

Für eine Punktlast $P = 1$ an der Strecke $[0, L]$ mit links liegendem Auflager gilt das statische Momentengleichgewicht. Die Reaktionen lauten

$$R_A(a) = \frac{L-a}{L}, \qquad R_B(a) = \frac{a}{L},$$

mit $a \in [0, L]$. Die Einflusslinie von R_A ist eine gerade Linie, die bei $a = 0$ den Wert $R_A = 1$ annimmt und bei $a = L$ zu $R_A = 0$ verläuft:

$$R_A(a) = \frac{L-a}{L}.$$

b) Einflusslinie der vertikalen Reaktion am rechten Auflager R_B

Analog zur linken Reaktion gilt

$$R_B(a) = \frac{a}{L}, \qquad a \in [0, L].$$

Die Einflusslinie ist eine gerade Linie mit Steigung $1/L$, beginnend bei $R_B(0) = 0$ und endend bei $R_B(L) = 1$.

c) Einflusslinie des Biegemoments $M(x)$ an einer Stelle $x \in [0, L]$ verursacht durch eine Einheitlast an der Stelle a

Die Momentenlinie ergibt sich aus den Reaktionen und dem Momentenverlauf innerhalb des Balkens. Für den Fall eines simply supported Balkens gilt allgemein

$$M(x; a) = \begin{cases} \dfrac{a}{L}\,(L-x), & a \le x, \\ \dfrac{L-a}{L}\,x, & a \ge x, \end{cases} \qquad 0 \le x \le L,\ 0 \le a \le L.$$

Die Form ist eine stückweise lineare Einflusslinie in a mit dem Maximum bei $a = x$. Der maximale Betrag eines linearen Moments durch eine Verschiebung der Last an einer gegebenen Stelle

$$|M_{\max}(x)| = \frac{x(L-x)}{L},$$

erreicht sein, z. B. am Ort $x = \frac{L}{2}$ mit $|M_{\max}| = \frac{L}{4}$.

Zur qualitativ-skizzenhaften Darstellung: Für festes x ist $M(x; a)$ als Funktion von a eine gerade Linie im linken Bereich (wenn $a \le x$: $M = (a/L)(L-x)$) und eine zweite gerade Linie im rechten Bereich (wenn $a \ge x$: $M = ((L-a)/L)x$). Die Schnittstelle liegt bei $a = x$ und liefert den Spitzenwert $M(x; x) = x(L-x)/L$.

d) Interpretation der Einflusslinien

- Bereiche mit starker Beeinflussung: Reaktionen am linken Auflager werden vor allem durch Lasten näher an A beeinflusst; Reaktionen am rechten Auflager stärker durch Lasten näher an B. Das Moment an einer Stelle x wird am stärksten beeinflusst, wenn sich die Last genau vor x befindet ($a \approx x$). - Rückschluss für Lastführung: Um Spitzenreaktionen zu vermeiden, Lasten möglichst nicht in Bereichen platzieren, in denen die Einflusslinien hoch sind. Eine bewegliche Lastführung oder Verlagerung der Last über verschiedene Positionen reduziert lokal Spitzenmomente bzw. Spitzenreaktionen, indem sie die Wirkkraft auf unterschiedliche Unterstützungsreaktionen verteilt. - Konsequenz für Tragwerksentwurf: Bei statisch bestimmten Balken ist die Verteilung der Lastpositionen ein zentrales Kriterium zur Minimierung der Reaktions- und Momentspitzen; Bandbreite der Einflusslinien liefert hier zentrale Hinweise.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Zustandslinie der Durchbiegung $w(x; a)$ am Ort x aufgrund einer vertikalen Einheitlast $P = 1$ an der Position a

Unter der Annahme konstanter Elastizität E und Trägheit I gilt gemäß der virtuellen Kraftmethode (Auswertung der Kopplung zweier Balkenmomente M über EI):

$$w(x; a) = \frac{1}{EI} \int_0^L M_P(s; a)\, M_{\text{virt}}(s; x)\, ds,$$

mit

$$M_P(s; a) = \begin{cases} \dfrac{L-a}{L}\, s, & s \le a, \\ \dfrac{a}{L}\,(L-s), & s \ge a, \end{cases} \qquad M_{\text{virt}}(s; x) = \begin{cases} \dfrac{L-x}{L}\, s, & s \le x, \\ \dfrac{x}{L}\,(L-s), & s \ge x. \end{cases}$$

Aus diesen Definitionen erhält man die geschlossene, fallspezifische Form durch Zerlegung der Integration in die Schnittbereiche $s \le \min(a, x)$, $\min(a, x) < s \le \max(a, x)$ und $s \ge \max(a, x)$. Daraus folgt für die beiden Fallunterscheidungen

- Fall $a \le x$:

$$w(x; a) = \frac{1}{EI} \left[\frac{(L-a)(L-x)}{L^2} \frac{a^3}{3} + \frac{a(L-x)}{L^2} \Big(L\,(x^2 - a^2)/2 \;-\; (x^3 - a^3)/3 \Big) + \frac{ax}{L^2} \frac{(L-x)^3}{3} \right].$$

- Fall $a \ge x$:

$$w(x; a) = \frac{1}{EI} \left[\frac{(L-a)(L-x)}{L^2} \frac{x^3}{3} + \frac{(L-a)x}{L^2} \Big(L\,(a^2 - x^2)/2 \;-\; (a^3 - x^3)/3 \Big) + \frac{ax}{L^2} \frac{(L-a)^3}{3} \right].$$

Hinweis: Diese zwei Fälle decken alle Konstellationen ab ($0 \le x \le L$, $0 \le a \le L$). Die Gleichungen stellen die allgemeine Abhängigkeit von $w(x; a)$ dar (mit $P = 1$ und EI als Material-/Trägheitskennwert); numerisch muss im konkreten Fall L, E und I eingesetzt werden.

b) Beispiel $a = \frac{L}{2}$ – qualitative Skizze

- Die Zustandslinie $w(x; L/2)$ ist symmetrisch um $x = L/2$. - Die größte Durchbiegung tritt bei $x = L/2$ auf; dort gilt $w_{\max} = w(L/2; L/2)$. - Die Kurve ist im Wesentlichen dreiteilig (aufgrund der Fallunterscheidung), aber aufgrund der Symmetrie ergibt sich eine glatte, symmetrische Form, die von Null am linken Rand über einen Maximum bei der Mitte zu Null am rechten Rand verläuft. - Ohne numerische Auswertung lässt sich die Form als eine kubisch-ähnliche Verformung beschreiben, die in der linken Hälfte ansteigt, in der rechten Hälfte symmetrisch abnimmt.

c) Veränderung der Zustandslinie $w(x; a)$ bei Verschiebung von a

- Wenn a von links nach rechts verschoben wird, verschiebt sich die Stelle maximaler Durchbiegung ebenfalls, in der Regel folgen die Maximalwerte in etwa der Bedingung $a \approx x$. - Die Sensitivität $\partial w(x; a)/\partial a$ lässt sich durch Ableitung der obigen Integraldarstellung erhalten:

$$\frac{\partial w(x; a)}{\partial a} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{\partial M_P(s; a)}{\partial a} M_{\text{virt}}(s; x)\, ds,$$

mit

$$\frac{\partial M_P}{\partial a} = \begin{cases} -\dfrac{s}{L}, & s < a, \\ \dfrac{L-s}{L}, & s > a. \end{cases}$$

- Explizit ergibt sich eine signaleabhängige Verteilung; qualitativ ist die Sensitivität am höchsten in Bereichen um die Lage $a \approx x$ und nimmt ab, je weiter s von a bzw. x entfernt ist. - Praktisch bedeutet dies: kleine Änderungen der Lastposition a verursachen größere Veränderungen der Durchbiegung dort, wo die virtuelle Weggröße zum Messort x besonders stark mit dem Momentenverlauf des realen Lastfalls korreliert.

d) Praktische Schlüsse für die Tragwerksplanung

- Lastführung und Positionierung: Um Durchbiegungsspitzen zu begrenzen, Lasten nicht in Bereichen mit hoher Empfindlichkeit gegenüber Verschiebungen positionieren; bei beweglichen Lasten empfiehlt sich eine gleichmäßige oder modulare Verteilung. - Verformungskriterien: Die Kenntnis von $w(x;a)$ und deren Sensitivität ermöglicht gezielte Auslegung von Verformungskriterien (maximale Durchbiegung, Ye-Standards). - Sicherheit: Durch die Analyse der Zustandslinien lassen sich Rangfolgen der sicherheitsrelevanten Stellen ableiten und gegebenenfalls Bauteile oder Zusatzmittelpunkte/Unterstützungen so gestalten, dass Spitzenbeanspruchungen reduziert werden.