Lernzettel

Wellen- und hyperbolische PDEs in der Elektrotechnik: Leitungsgleichungen, Transmissionslinien, Transformationsmethoden

Universität: Technische Universität Berlin
Kurs/Modul: Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissens
Erstellungsdatum: September 20, 2025

Lernzettel: Wellen- und hyperbolische PDEs in der Elektrotechnik: Leitungsgleichungen, Transmissionslinien, Transformationsmethoden

(1) Modell und Leitungsgleichungen. Die telegrapher'schen Gleichungen beschreiben Leitungen mit per Längeneinheit: Widerstand R, Induktivität L, Leitfähigkeit G und Kapazität C. Für die Spannung $V(x,t)$ und den Strom $I(x,t)$ gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}\right).$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\left(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Für den Verlustfreien Fall ($R = 0$, $G = 0$) erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\frac{\partial I}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt das Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

(2) Transmissionslinien. Für eine Leitung mit Per-Einheitslänge R, L, G, C gilt im Frequenzbereich (phasorisch) die charakteristische Impedanz

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}.$$

Bei Verlustfreiheit ($R = 0$, $G = 0$) wird daraus

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Zudem lassen sich ein- und ausgehende Wellen als Superposition von Vorwärts- und Rückwärtswellen darstellen:

$$V(x,t) = V_+(t - \tfrac{x}{v}) + V_-(t + \tfrac{x}{v}),$$

$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0}\Big[V_+(t - \tfrac{x}{v}) - V_-(t + \tfrac{x}{v})\Big].$$

Die Reflexion am Abschluss mit Last Z_L wird durch den Reflexionskoeffizienten beschrieben:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}.$$

Zusammenhang am Ort $x = 0$ (Lastseite):

$$V(0,t) = Z_L I(0,t).$$

Man erhält daraus

$$V_-(t) = \Gamma\, V_+(t),$$

und damit

$$V(0,t) = V_+(t) + V_-(t) = (1+\Gamma)\, V_+(t).$$

(3) Transformationsmethoden. Transformationsmethoden dienen dazu, zeitabhängige Probleme in Rechenräume zu verlagern, in denen die Gleichungen leichter lösbar sind.
(a) Laplace-Transformation ($\mathcal{L}$):

$$V(x,s) = \mathcal{L}\{V(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} V(x,t)\, dt.$$

Für das Verlustfreie Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{s^2}{v^2} V = 0,$$

erhält man in s-Raum die Lösung

$$V(x,s) = A(s)\, e^{sx/v} + B(s)\, e^{-sx/v}.$$

Durch Randbedingungen bestimmt man $A(s), B(s)$ und erhält nach Rücktransformation $V(x,t)$. Für eine semiendlose Linie ($x \geq 0$) mit finiterAuslenkung nach außen gilt typischerweise $A(s) = 0$, so dass

$$V(x,s) = B(s) e^{-sx/v}.$$

(b) Fourier-Transformation ($\mathcal{F}$) in x für unendliche Linien:

$$\hat{V}(k,t) = \mathcal{F}_x\{V(x,t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} V(x,t)\, dx.$$

Dann wird aus dem Wellengleichung

$$-k^2 \hat{V} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial t^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial t^2} + v^2 k^2 \hat{V} = 0.$$

(4) Wichtige Ergebnisse.

- Allgemeine Wellenlösung der Verlustfreien Leitung:

$$V(x,t) = f\Big(t - \frac{x}{v}\Big) \;+\; g\Big(t + \frac{x}{v}\Big),$$

$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0}\Big[f\Big(t - \frac{x}{v}\Big) - g\Big(t + \frac{x}{v}\Big)\Big].$$

- Randbedingung am Ort $x = 0$ mit Last Z_L:

$$V(0,t) = Z_L I(0,t) \quad \Rightarrow \quad V_+(t) + V_-(t) = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V_+(t) - V_-(t)\right).$$

- Reflexionskoeffizient:
$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}.$$
- Zusammenhang von Vorwärts- und Rückwärtsanteil:
$$V_-(t) = \Gamma\, V_+(t), \qquad V(0,t) = (1+\Gamma)\, V_+(t).$$

(5) Beispiel und Applicationen. Beispiel 1: Eine Verlustfreie Leitung mit $Z_0 = 50\,\Omega$ wird von einer Last $Z_L = 100\,\Omega$ abgeschlossen. Der Reflexionskoeffizient ist

$$\Gamma = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3}.$$

Die reflektierte Welle hat Amplitude Γ der Vorwärtswelle. Die Gesamtspannung am Lastknoten ist

$$V(0,t) = (1+\Gamma)\, V_+(t) = \frac{4}{3} V_+(t).$$

Beispiel 2: Impedanzanpassung ohne Reflektion ($Z_L = Z_0$) führt zu $\Gamma = 0$ und damit zu einer vollständig durchgelassenen Vorwärtswelle.

(6) Fazit. - Transmissionslinien modellieren elektrische Signale als sich ausbreitende Wellen; - Die Telegrapher-Gleichungen liefern eine Grundlage für Spannung und Strom entlang der Leitung; - Transformationsmethoden (Laplace, Fourier) ermöglichen es, zeitabhängige Probleme in einfachere Rechenräume zu überführen und Lösungen zurückzustrukturieren; - Wichtige Konzepte: Wellenform (f, g), Ausbreitungsgeschwindigkeit v, Impedanz (Z_0, Z_L) und Reflexion Γ.